Devoir Maison – ALGO1

Novembre 2025

Consignes :
Le non-respect d'une ou plusieurs de ces consignes pourra être sanctionné dans la note finale du DM.

1. Le DM doit être rendu au format papier à la fin du TD du **5 décembre 2025**.
2. Il s'agit d'un travail **personnel**.
3. La qualité et l'élégance de la rédaction seront prises en compte. Veuillez tenir compte des critères suivants :
   (a) Toutes vos réponses doivent être justifiées. En l'absence de justification, une réponse correcte n'a pas de valeur.
   (b) Vos réponses doivent être clairement structurées. L'enchaînement de vos arguments doit être clair et le lecteur n'a pas à tirer de conclusion à votre place.
   (c) S'il existe un argument simple (ou direct) mais que votre solution est déraisonnablement longue, vous serez pénalisé.
4. Afin de répondre à une question, vous pouvez utiliser un résultat énoncé dans une question précédente même si vous ne l'avez pas prouvé.
5. Même si vous n'êtes pas obligés de résoudre les questions dans l'ordre, il vous est demandé de rédiger vos solutions dans l'ordre en indiquant clairement le numéro de la question correspondante. Indiquez également clairement si vous n'avez pas répondu à la question.
6. Écrivez votre NOM et votre PRÉNOM sur toutes les pages de réponses. Vous pouvez rendre uniquement vos pages de réponses.

1 Jeux multijoueurs avec objectifs de Büchi

1.1 Définitions préliminaires

La notion de jeu joué sur un graphe a déjà été abordée lors de différentes séances de CM et de TD. Nous avons considéré différents objectifs qualitatifs dont l'objectif *d'accessibilité* et l'objectif *de Büchi*[1].

Définition 1.1. Etant donné $\mathcal{A}$ une arène et $\mathsf{T} \subseteq \mathsf{V}$ un *ensemble cible* :

- $\mathsf{Reach}(\mathsf{T}) = \{\pi \in \mathsf{Plays} \mid \exists k \in \mathbb{N},\, \pi_k \in \mathsf{T}\}$ est un objectif *d'accessibilité*.
- $\mathsf{Buchi}(\mathsf{T}) = \{\pi \in \mathsf{Plays} \mid \forall k \in \mathbb{N}\, \exists \ell \geq k,\, \pi_\ell \in \mathsf{T}\}$ est un objectif *de Büchi*.

Etant donné $\mathsf{T}_i \subseteq \mathsf{V}$ un ensemble cible pour chaque $i \in \mathsf{N}$,

- un jeu multijoueur $\mathcal{G} = (\mathcal{A}, (\mathsf{Reach}(\mathsf{T}_i))_{i \in \mathsf{N}})$ est appelé jeu multijoueur avec objectifs d'accessibilité.
- un jeu multijoueur $\mathcal{G} = (\mathcal{A}, (\mathsf{Buchi}(\mathsf{T}_i))_{i \in \mathsf{N}})$ est appelé jeu multijoueur avec objectifs de Büchi.

Intéressons-nous dans un premier temps aux jeux multijoueurs avec objectifs de Büchi. Un exemple d'un tel jeu est donné à la Figure 1. Tout comme pour les jeux multijoueurs avec objectifs d'accessibilité, il existe toujours un équilibre de Nash dans un jeu multijoueur avec objectifs de Büchi.

Proposition 1.2 Soit $(\mathcal{G}, v_0) = (\mathcal{A}, (\mathsf{Buchi}(\mathsf{T}_i))_{i \in \mathsf{N}})$ un jeu multijoueur avec objectifs de Büchi initialisé, il existe un équilibre de Nash dans $(\mathcal{G}, v_0)$. □

De même, à un jeu à n joueurs avec objectifs de Büchi peuvent être associés n jeux à deux joueurs et à somme-nulle, appelés jeux de coalition, tels qu'un des joueurs possède un objectif de Büchi et l'autre joueur l'objectif complémentaire.

Définition 1.3. Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{A}, (\mathsf{Buchi}(\mathsf{T}_i))_{i \in \mathsf{N}})$ un jeu multijoueur avec objectifs de Büchi et soit $i \in \mathsf{N}$ un joueur. Le *jeu de coalition du joueur* i, est le jeu à deux joueurs et à somme-nulle $(\mathcal{A}', (\mathsf{Win}'_j)_{j \in \mathsf{N}'})$ tel que :

- l'arène $\mathcal{A}' = (\mathsf{N}', \mathsf{V}', \mathsf{E}', (\mathsf{V}'_j)_{j \in \mathsf{N}'})$ est telle que :
  - — $\mathsf{N}' = \{i, -i\}$ où $-i$ est un seul joueur formé de la coalition de tous les joueurs sauf le joueur i ;
  - — $\mathsf{V}' = \mathsf{V}$ et $\mathsf{E}' = \mathsf{E}$;
  - — $\mathsf{V}'_i = \mathsf{V}_i$ et $\mathsf{V}'_{-i} = \bigcup_{j \in \mathsf{N}, j \neq i} V_j$
- $\mathsf{Win}'_i = \mathsf{Buchi}(\mathsf{T}_i)$ et $\mathsf{Win}'_{-i} = \mathsf{Plays} \setminus \mathsf{Buchi}(\mathsf{T}_i)$ (c'est un jeu à somme-nulle).

Le jeu de coalition du joueur i est noté $\mathcal{C}_i = (\mathcal{A}', \mathsf{Buchi}(\mathsf{T}_i))$ et
$\mathsf{W}_i = \{v \in \mathsf{V} \mid$ il existe une stratégie gagnante de J_i dans $(\mathcal{C}_i, v)\}$ est la *région gagnante* de J_i dans $\mathcal{C}_i$.

Proposition 1.4 Si $\mathcal{G}$ est un jeu multijoueur avec objectifs de Büchi, pour tout $i \in \mathsf{N}$, W_i peut être calculé en temps polynomial. □

Grâce à ces différents jeux de coalition, nous pouvons caractériser exactement les parties qui sont les outcomes d'équilibres de Nash.

Proposition 1.5 Soit $(\mathcal{G}, v_0) = (\mathcal{A}, (\mathsf{Buchi}(\mathsf{T}_i))_{i \in \mathsf{N}})$ un jeu multijoueur avec objectifs de Büchi initialisé, soit $\pi \in \mathsf{Plays}(v_0)$,

$$\text{il existe un EN } \overline{\sigma} \text{ dans } (\mathcal{G}, v_0) \text{ tel que } \mathsf{Outcome}(\overline{\sigma}, v_0) = \pi$$
$$\text{si et seulement si}$$
$$\text{pour tout } i \in \mathsf{N},\ (\pi \notin \mathsf{Buchi}(\mathsf{T}_i) \implies \forall k \in \mathbb{N},\ \pi_k \notin \mathsf{W}_i).$$

□

1. Cet objectif est parfois appelé *objectif d'accessibilité répétée*, comme c'était le cas en TD.

Les Propositions 1.2, 1.4 et 1.5 sont admises sans preuve. Vous pouvez donc les utiliser dans la suite.

Étant donné un jeu multijoueur avec objectifs de Büchi initialisé, nous souhaitons décider l'existence d'un EN dans ce jeu tel que son outcome est gagnant (resp. perdant) pour un certain sous-ensemble de joueurs $\mathsf{Gagnant} \subseteq \mathsf{N}$ (resp. $\mathsf{Perdant} \subseteq \mathsf{N}$).

Problème Büchi-EN.
Etant donné $(\mathcal{G}, v_0) = (\mathcal{A}, (\mathsf{Buchi}(\mathsf{T}_i))_{i \in \mathsf{N}})$ un jeu multijoueur avec objectifs de Büchi initialisé ainsi que $\mathsf{Gagnant} \subseteq \mathsf{N}$ et $\mathsf{Perdant} \subseteq \mathsf{N}$ deux sous-ensembles de joueurs,
existe-t-il un équilibre de Nash $\overline{\sigma}$ dans $(\mathcal{G}, v_0)$ tel que :

- pour tout $i \in \mathsf{Gagnant}$, $\mathsf{Outcome}(\overline{\sigma}, v_0) \in \mathsf{Buchi}(\mathsf{T}_i)$;
- pour tout $i \in \mathsf{Perdant}$, $\mathsf{Outcome}(\overline{\sigma}, v_0) \notin \mathsf{Buchi}(\mathsf{T}_i)$?

L'objectif de la Section 1.2 est de prouver que le Problème BÜCHI-EN peut-être décidé par un algorithme s'exécutant en temps polynomial [1].

Théorème 1.6 Le Problème BÜCHI-EN est dans P.

1.2 Algorithme pour décider le Problème Büchi-EN.

Dans la suite, les notions et notations suivantes sont utilisées :

- Dans un graphe, une composante fortement connexe est non-triviale si elle possède au moins un arc.
- Soient $\mathsf{G} = (\mathsf{V}, \mathsf{E})$ un graphe et $\mathsf{X} \subseteq \mathsf{V}$ un sous-ensemble de sommets de ce graphe. La restriction de G à X, notée $\mathsf{G}_{\restriction \mathsf{X}}$, est un graphe tel que son ensemble de sommets est X et son ensemble d'arcs, noté E_X, est l'ensemble des arcs de E dont les deux extrémités sont dans X, *i.e.,* $\mathsf{E}_\mathsf{X} = \{(v, v') \in \mathsf{E} \mid v, v' \in \mathsf{X}\}$.
- Soit $\pi \in \mathsf{Plays}$, $\mathsf{Inf}(\pi) = \{v \in \mathsf{V} \mid \forall k \in \mathbb{N}\, \exists \ell \geq k, \pi_\ell = v\}$ est l'ensemble des sommets visités infiniment souvent le long de π. La restriction de G à $\mathsf{Inf}(\pi)$ forme un graphe fortement connexe.

Échauffement.

La Figure 1 représente un jeu avec 3 joueurs, chacun ayant un objectif de Büchi. L'arène du jeu ainsi que les différents ensembles cibles sont donnés dans la description de la figure.

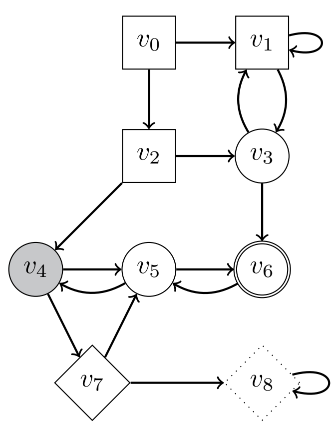


FIGURE 1 – Exemple d'un jeu multijoueur avec objectifs de Büchi. L'arène de ce jeu est donnée par $\mathsf{N} = \{1, 2, 3\}$, $\mathsf{G} = (\mathsf{V}, \mathsf{E})$ est donné par le graphe ci-dessus, $\mathsf{V}_1 = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$ correspond aux sommets représentés par des cercles, $\mathsf{V}_2 = \{v_0, v_1, v_2, \}$ correspond aux sommets représentés par des carrés et $\mathsf{V}_3 = \{v_7, v_8\}$ correspond aux sommets représentés par des losanges. Les ensembles cibles des joueurs sont $\mathsf{T}_1 = \{v_4\}$, $\mathsf{T}_2 = \{v_6\}$ et $\mathsf{T}_3 = \{v_8\}$.

Question 1.

Pour le jeu multijoueur avec objectifs de Büchi $(\mathcal{G}, v_0) = (\mathcal{A}, (\mathsf{Buchi}(\mathsf{T}_1), \mathsf{Buchi}(\mathsf{T}_2), \mathsf{Buchi}(\mathsf{T}_3)))$ donné à la Figure 1 :

1. Donner le jeu de coalition $\mathcal{C}_1$ et calculer W_1.
2. Donner le jeu de coalition $\mathcal{C}_2$ et calculer W_2.
3. Donner le jeu de coalition $\mathcal{C}_3$ et calculer W_3.

Question 2.

Dans le jeu multijoueur avec objectifs de Büchi $(\mathcal{G}, v_0) = (\mathcal{A}, (\mathsf{Buchi}(\mathsf{T}_1), \mathsf{Buchi}(\mathsf{T}_2), \mathsf{Buchi}(\mathsf{T}_3)))$ donné à la Figure 1 :

1. Existe-t-il un EN $\overline{\sigma}$ dans $(\mathcal{G}, v_0)$ tel que, si $\pi = \mathsf{Outcome}(\overline{\sigma}, v_0)$, π est gagnant pour J_1 et J_2 ?
   (a) Si oui, en donner un et illustrer $\mathsf{Inf}(\pi)$ sur l'arène. Si non, expliquer pourquoi.
   (b) En existe-t-il un tel que les stratégies des trois joueurs sont sans mémoire ? Si oui, en donner un. Si non, expliquer pourquoi.
2. Existe-t-il un EN $\overline{\sigma}$ dans $(\mathcal{G}, v_0)$ tel que, si $\pi = \mathsf{Outcome}(\overline{\sigma}, v_0)$, π est gagnant uniquement pour J_1 ? Si oui, en donner un et illustrer $\mathsf{Inf}(\pi)$ sur l'arène. Si non, expliquer pourquoi.
3. Existe-t-il un EN $\overline{\sigma}$ dans $(\mathcal{G}, v_0)$ tel que, si $\pi = \mathsf{Outcome}(\overline{\sigma}, v_0)$, π est gagnant uniquement pour J_2 ? Si oui, en donner un et illustrer $\mathsf{Inf}(\pi)$ sur l'arène. Si non, expliquer pourquoi.

Algorithme polynomial.

Un algorithme permettant de décider le Problème Büchi-EN est l'Algorithme 1 (RésoudreJeu) tel que :

Entrées :

- $\mathcal{G} = ((\mathsf{N}, \mathsf{V}, \mathsf{E}, (\mathsf{V}_i)_{i \in \mathsf{N}}), (\mathsf{Buchi}(\mathsf{T}_i))_{i \in \mathsf{N}})$ un jeu multijoueur avec objectifs de Büchi ;
- $\mathsf{Gagnant} \subseteq \mathsf{N}$ et $\mathsf{Perdant} \subseteq \mathsf{N}$ deux sous-ensembles de joueurs.

Sorties : Z l'ensemble des sommets $v \in \mathsf{V}$ tels qu'il existe une EN $\overline{\sigma}$ dans $(\mathcal{G}, v)$ tel que

- pour tout $i \in \mathsf{Gagnant}$, $\mathsf{Outcome}(\overline{\sigma}, v) \in \mathsf{Buchi}(\mathsf{T}_i)$;
- pour tout $i \in \mathsf{Perdant}$, $\mathsf{Outcome}(\overline{\sigma}, v) \notin \mathsf{Buchi}(\mathsf{T}_i)$.

L'Algorithme 1 (RésoudreJeu) effectue différents pré-traitements avant d'appeler l'Algorithme 2 (RésoudreSousJeu) qui calcule réellement Z. En plus de $\mathcal{G}$, $\mathsf{Gagnant}$ et $\mathsf{Perdant}$, l'Algorithme 2 prend en entrées $(\mathsf{W}_i)_{i \in \mathsf{N}}$, la région gagnante de chaque joueur i dans le jeu de coalition correspondant $\mathcal{C}_i$, et X un sous-ensemble de sommets du graphe G de départ sur lequel l'algorithme va s'effectuer.

Algorithme 1 : RésoudreJeu($\mathcal{G}$,Gagnant, Perdant)

```
Calculer W_i pour chaque i ∈ N
X ← V \ ⋃_{i∈Perdant} T_i
retourner RésoudreSousJeu(X,G,(W_i)_{i∈N},Gagnant,Perdant)
```

Algorithme 2 : RÉSOUDRESOUSJEU(X,$\mathcal{G}$,$(\mathsf{W}_i)_{i\in\mathsf{N}}$,Gagnant,Perdant)

$\mathsf{Z} \leftarrow \emptyset$
Décomposer $\mathsf{G}_{\restriction \mathsf{X}}$ en composantes fortement connexes (CFC)
pour *chaque CFC* C *de* $\mathsf{G}_{\restriction \mathsf{X}}$ *non-triviale* **faire**
    $\mathsf{L} \leftarrow \{i \in \mathsf{N} \mid \mathsf{C} \cap \mathsf{T}_i = \emptyset\}$
    si *pour tout* $i \in$ Gagnant, $i \notin \mathsf{L}$ **alors**
        $\mathsf{Y} \leftarrow \mathsf{C} \setminus \bigcup_{i\in\mathsf{L}} \mathsf{W}_i$
        si $\mathsf{Y} = \mathsf{C}$ **alors**
            $\mathsf{Z} \leftarrow \mathsf{Z} \cup \{v \in \mathsf{V} \mid \mathsf{C}$ est accessible depuis v dans $\mathsf{G}_{\restriction \mathsf{V}\setminus \cup_{i\in\mathsf{L}} \mathsf{W}_i}\}$
        sinon
            $\mathsf{Z} \leftarrow \mathsf{Z} \cup$ RÉSOUDRESOUSJEU(Y,$\mathcal{G}$,$(\mathsf{W}_i)_{i\in\mathsf{N}}$, Gagnant,Perdant)
retourner Z

Question 3. Expliquer l'exécution de l'Algorithme 1 sur le jeu de la Figure 1 avec Gagnant $= \{1\}$ et Perdant $= \{2\}$.

Conseils : avant d'aborder la suite et afin de mieux appréhender les Algorithmes 1 et 2, n'hésitez pas à :

- exécuter les Algorithmes 1 et 2 avec d'autres ensembles Gagnant et Perdant (ceux de la Question 2 par exemple) ou sur d'autres exemples.
- faire l'exercice d'expliquer ces algorithmes et pourquoi il sont corrects en français, comme si vous les expliquiez à quelqu'un qui ne les connaissait pas, avant de vous lancer dans une rédaction plus formelle.

Question 4. Justifier que l'Algorithme 1 s'exécute en temps polynomial.

Question 5. Soit Z l'ensemble de sommets renvoyé par l'Algorithme 1. Prouver que si $v \in \mathsf{Z}$, alors il existe un équilibre de Nash $\overline{\sigma}$ dans $(\mathcal{G}, v)$ tel que (1) pour tout $i \in$ Gagnant, $\mathsf{Outcome}(\overline{\sigma}, v) \in \mathsf{Buchi}(\mathsf{T}_i)$ et (2) pour tout $i \in$ Perdant, $\mathsf{Outcome}(\overline{\sigma}, v) \notin \mathsf{Buchi}(\mathsf{T}_i)$.

Indices :

- Soit $\pi \in \mathsf{Plays}$, faire le lien entre $\mathsf{Inf}(\pi)$, la notion d'être fortement connexe dans un graphe et le fait que π soit gagnant/perdant pour un objectif de Büchi.
- Ecrire ce que signifie que v ait été ajouté à Z à une étape de l'Algorithme 2.
- Faire le lien avec la Proposition 1.5 et conclure.

Question 6. Soit Z l'ensemble de sommets renvoyé par l'Algorithme 1. Prouver que s'il existe un équilibre de Nash $\overline{\sigma}$ dans $(\mathcal{G}, v)$ tel que (1) pour tout $i \in$ Gagnant, $\mathsf{Outcome}(\overline{\sigma}, v) \in \mathsf{Buchi}(\mathsf{T}_i)$ et (2) pour tout $i \in$ Perdant, $\mathsf{Outcome}(\overline{\sigma}, v) \notin \mathsf{Buchi}(\mathsf{T}_i)$, alors $v \in \mathsf{Z}$.

Indices :

- Si $\overline{\sigma}$ est un EN dans $(\mathcal{G}, v)$ et que π est son outcome, que peut-on dire de $\mathsf{Inf}(\pi)$ par rapport aux composantes fortement connexes traitées dans l'Algorithme 2.
- Utiliser la Proposition 1.5.

Les Questions 4, 5 et 6 prouvent le Théorème 1.6.

2 Retour sur les jeux multijoueurs avec objectifs d'accessibilité

Dans cette section, nous nous intéressons à l'existence d'un algorithme déterministe pour résoudre le Problème REACH-EN qui est NP-complet et a été abordé en cours et en TD.

Problème Reach-EN.
Etant donné $(\mathcal{G}, v_0) = (\mathcal{A}, (\mathsf{Reach}(\mathsf{T}_i))_{i \in \mathsf{N}})$ un jeu multijoueur avec objectifs d'accessibilité initialisé ainsi que $\mathsf{Gagnant} \subseteq \mathsf{N}$ et $\mathsf{Perdant} \subseteq \mathsf{N}$ deux sous-ensembles de joueurs,
existe-t-il un équilibre de Nash $\overline{\sigma}$ dans $(\mathcal{G}, v_0)$ tel que :

- pour tout $i \in \mathsf{Gagnant}$, $\mathsf{Outcome}(\overline{\sigma}, v_0) \in \mathsf{Reach}(\mathsf{T}_i)$;
- pour tout $i \in \mathsf{Perdant}$, $\mathsf{Outcome}(\overline{\sigma}, v_0) \notin \mathsf{Reach}(\mathsf{T}_i)$?

Question 7. Soit $(\mathcal{G}, v_0) = (\mathcal{A}, (\mathsf{Reach}(\mathsf{T}_i))_{i \in \mathsf{N}})$ un jeu multijoueur avec objectifs d'accessibilité initialisé. On peut transformer $(\mathcal{G}, v_0)$ en un jeu multijoueur avec objectifs de Büchi initialisé $(\mathcal{G}', v_0') = (\mathcal{A}', (\mathsf{Buchi}(\mathsf{T}_i'))_{i \in \mathsf{N}})$ de taille exponentielle et tel que, étant donnés $\mathsf{Gagnant} \subseteq \mathsf{N}$ et $\mathsf{Perdant} \subseteq \mathsf{N}$ formant une partition de N :[a]

$$(\bigstar) \quad \text{il existe un EN } \overline{\sigma} \text{ dans } (\mathcal{G}, v_0) \text{ tel que } \begin{cases} \{i \in \mathsf{N} \mid \mathsf{Outcome}(\overline{\sigma}, v_0) \in \mathsf{Reach}(\mathsf{T}_i)\} = \mathsf{Gagnant} \\ \{i \in \mathsf{N} \mid \mathsf{Outcome}(\overline{\sigma}, v_0) \notin \mathsf{Reach}(\mathsf{T}_i)\} = \mathsf{Perdant} \end{cases}$$

$$\text{si et seulement si}$$

$$\text{il existe un EN } \overline{\tau} \text{ dans } (\mathcal{G}', v_0') \text{ tel que } \begin{cases} \{i \in \mathsf{N} \mid \mathsf{Outcome}(\overline{\tau}, v_0') \in \mathsf{Buchi}(\mathsf{T}_i')\} = \mathsf{Gagnant} \\ \{i \in \mathsf{N} \mid \mathsf{Outcome}(\overline{\tau}, v_0') \notin \mathsf{Buchi}(\mathsf{T}_i')\} = \mathsf{Perdant} \end{cases}.$$

Définir un tel $(\mathcal{G}', v_0')$ qui satisfait l'équivalence $(\bigstar)$ et justifier.

[a] $\mathsf{Gagnant} \cup \mathsf{Perdant} = \mathsf{N}$ et $\mathsf{Gagnant} \cap \mathsf{Perdant} = \emptyset$

Conseils pour structurer votre réponse :

7.1. En cours nous avons montré comment transformer un jeu à un joueur avec objectif d'accessibilité généralisée en un jeu à un joueur avec objectif d'accessibilité (simple). En vous rappelant et en vous inspirant de la manière dont nous avions encodé une certaine forme de mémoire dans les états des sommets du jeu ainsi obtenu, donner une définition de $(\mathcal{G}', v_0')$.

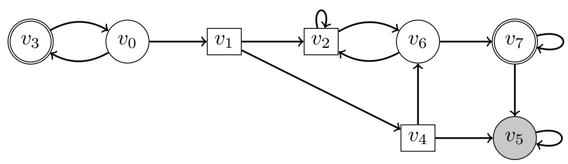
7.2. Expliquer comment passer d'une histoire/partie d'un jeu à l'autre.

7.3. Expliquer ce que l'on peut dire d'une partie gagnante/perdante pour un joueur dans un jeu et de la partie correspondante dans l'autre jeu.

7.4. Expliquer comment transformer une stratégie d'un joueur dans un jeu en une stratégie pour ce même joueur dans l'autre jeu.

7.5. Utiliser les points précédents pour prouver l'équivalence $(\bigstar)$.

Question 8. Appliquer la transformation de la Question 7 au jeu multijoueur d'accessibilité $(\mathcal{G}, v_0)$ dont l'arène est donnée ci-dessous et tel que $\mathsf{T}_1 = \{v_5\}$ et $\mathsf{T}_2 = \{v_3, v_7\}$. Il est suffisant de représenter uniquement les sommets accessibles depuis le sommet initial.



Question 9. Déduire de la Question 7 un algorithme déterministe qui résout le Problème Reach-EN. Quelle est sa complexité (polynomiale, exponentielle, . . .) ?

Références

[1] M. Ummels. The Complexity of Nash Equilibria in Infinite Multiplayer Games. In *FOSSACS 2008*, volume 4962 of *LNCS*, pages 20–34. Springer, 2008.